

# Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas

## Examen de Análisis Matemático I – septiembre 2013

1. Sean  $F \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cerrado y  $K \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto no vacíos y disjuntos  $F \cap K = \emptyset$ . Sea  $\|\cdot\|$  una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Prueba que hay puntos  $\mathbf{a} \in F$  y  $\mathbf{b} \in K$  tales que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in F, \mathbf{y} \in K\}$$

2. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  el campo escalar definido por:

$$f(x, y) = \frac{xy \cos x - x \sin y}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0$$

Calcula  $D_{12}f(0, 0)$  y  $D_{21}f(0, 0)$ . ¿Son las derivadas parciales de segundo orden de  $f$  continuas en  $(0, 0)$ ?

3. Justifica que hay conjuntos abiertos  $U \subset \mathbb{R}^3$  con  $(1, -1, 0) \in U$  y  $V \subset \mathbb{R}^3$  con  $(0, -1, 0) \in V$  tales que la función  $\mathbf{F}$  dada por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$$

es un difeomorfismo de  $U$  sobre  $V$ .

Sea  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(u, v, w) = u + e^v + \sin w$  y definamos  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g = h \circ \mathbf{F}^{-1}$ . Calcula  $\nabla g(0, -1, 0)$ .

4. Justifica que la ecuación

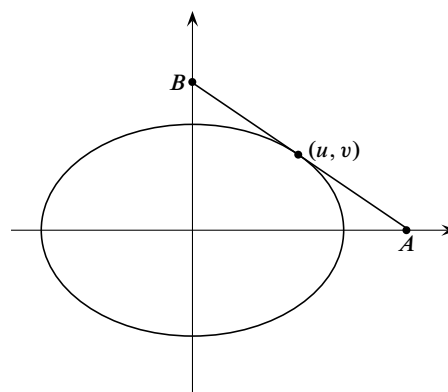
$$xyz + \sin(z - 6) - 2(x + y + x^2 y^2) = 0$$

define a  $z$  como función implícita de  $(x, y)$  en un entorno de  $(1, 1)$ , con  $z(1, 1) = 6$ . Comprueba que  $(1, 1)$  es un punto crítico de la función  $z = z(x, y)$  y estudia si se trata de un máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

5. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular un punto  $(u, v)$  ( $u > 0$ ,  $v > 0$ ) de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tal que el segmento  $\overline{AB}$  determinado por la intersección de la tangente a la elipse en dicho punto con los ejes coordenados tenga longitud mínima.



6. Prueba que todas las normas en un espacio vectorial normado de dimensión finita son equivalentes.